数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 95-99

Channels and Conditional Expectations over Functional Analysis

東京工業大学名誉教授

梅垣壽春 (HISAHARU UMEGAKI)

本論文では，Shannon 情報理論の核心の部分に当たる Channels (情報路，或いは通信路と訳される) の数理構造を，確率論の基本概念である Conditional Expectations 上に函数解析的方法を展開させることにより理論の進展を論ずる．

§1. 序論

情報 Entropy，Sampling Function，符号理論などと共に，天才 Shannon は大論文「通信の数学的理論」(A Mathematical Theory of Communication, 1948 年) を発表し，情報時代の幕が切って落とされた．1988 年には 40 周年を記念して Shannon は来日し，京都賞が授与された．Shannon Theory を基軸として，やがて情報時代の幕開けを迎えることとなる．

Professor C. E. Shannon は，本年 2 月逝去された．茲に心から哀悼の意を捧げ度い．

§2. Message Spaces と情報源

有限集合 A を一つの alphabet:

$$A = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(a)}\} \ (a \text{ は } A \text{ の元の個数})$$

とし，単位時間毎に何れかの $x^{(j)}$ を A から取り出すとする．その始点時刻を s，終点時刻を t ($s \leq t, s, t \in Z$) とすると，A の文字の鎖 (列)

$$\Pi_{k=s}^{t} x_k = (x_s, x_{s+1}, \ldots, x_t) \tag{2.1}$$

が得られる．ここで，index $s, s+1, \ldots, t \in Z$ (= integers 全体) とする．つまり，$\Pi_{k=s}^{t} x_k$ は time-interval $s \leq k \leq t$ 上の A の要素の時系列である．数学的展開を進める為に，有限集合 A の両側可算無限直積を

$$A^Z = \Pi_{-\infty<k<\infty} A_k = \cdots \times A_{-m} \times \cdots \times A_{-1} \times A_0 \times A_1 \times A_2 \times \cdots \tag{2.2}$$

$$(A_k = A,\ k \in Z = \{\ldots, -m, -m+1, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\})$$

とすると，A^Z はTychonoff積位相によって(可算)compact距離空間で，さらに全不連結である．A^Z の要素は単に(無限積) Πx_k で表し，特に，始点が s，終点が t $(s \leq t,\ s,t \in Z)$ である文字鎖を記号

$$[x_s^\circ \dots x_t^\circ] = \{\Pi x_k \in A^Z; x_k = x_k^\circ\ (s \leq k \leq t)\}$$

によって表す．これを**message**と呼ぶ．これは集合論的にはAの文字の無限列の集団であり，空間A^Zの部分集合である．messageは積位相空間A^Z の**clopen set**で，これの全体は可算集合族で，空間A^Zの位相基をなす，i.e.，A^Z は全不連結である．この A^Z を**message空間**と呼ぶ．

空間 A^Z は距離化可能である．この距離は次の方法で定義すればよい: まず

$$d(x^{(j)}, x^{(k)}) = |j-k|/a$$

とし，これを用いて任意の二元 $\Pi x_k, \Pi y_k \in A^Z$ に対して，距離を

$$\rho(\Pi x_k, \Pi y_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d(x_k, y_k)}{2^{|2k|}}$$

と定義すればA^Z は距離空間となり，A^Z のTychonoff積位相と同相となる．各message はclopen in A^Z であり，任意のclopen set はmessagesの有限直和となる．

§3. 情報源 $[A^Z, \mu]$

TをA^Z 上の**Shift変換**，i.e.，$T(\Pi x_k) = \Pi x_{k+1}$，$\mathcal{P}(A^Z) \triangleq$「$A^Z$ 上の正則な確率測度の全体」，$\mathcal{P}_T(A^Z) \triangleq \{\mu \in \mathcal{P}(A^Z);\ \mu$ はTに関して不変$\}$とする．連続函数空間 $C(A^Z)$ はsup-normによってBanach空間であり，$\mathcal{P}(A^Z)$，$\mathcal{P}_T(A^Z)$ は共に$C(A^Z)$の dual空間$C(A^Z)^*$ のunit ballのconvex subsetsで，共に弱*位相に関してcompact 且つ$\mathcal{P}_T(A^Z) \subset \mathcal{P}(A^Z)$である．**Krein-Milmanの定理**によって，$\mathcal{P}(A^Z)$，$\mathcal{P}_T(A^Z)$ は共に十分多くの端点を有する．そこで，同等関係「$\mu \in \mathcal{P}_T(A^Z)$ がergodic $\Longleftrightarrow$ μは端点in $\mathcal{P}_T(A^Z)$」なる有効なcharacterizationが知られている．ergodicなμの全体をer$\mathcal{P}_T(A^Z)$ と記す．

一般に，対$[A^Z, \mu]$ $(\mu \in \mathcal{P}_A)$ を**情報源**，ergodicなμのとき，$[A^Z, \mu]$ を**ergodic情報源**と名付けられる．これらの構成は続く§で活躍する．

§4. Channels and Averaging Operators

A，Bを2種類のalphabetsの集合対とする．直積$C = A \times B$も第3のalphabets と見なせる．これら各々に対するmessage空間: A^Z, B^Z, C^Z $(= (A \times B)^Z)$ のBorel可測(σ-)集合体をそれぞれ$\mathcal{F}_A$，$\mathcal{F}_B$，$\mathcal{F}_C$で表す．各々の上で正則な確率測度全体を$\mathcal{P}(A^Z)$，$\mathcal{P}(B^Z)$，$\mathcal{P}(C^Z)$で表し，また各message空間上のshift変換は同一記号

Tをもって表す．この変換Tは各々の空間A^Z，B^Z，C^Z上で'homeomorphism'である．

次に'channels'の概念を定義する．2変数函数

$$\nu(\cdot,\cdot): A^Z \times \mathcal{F}_B \to [0,1]$$

が条件:

(C.1) $\forall x \in A^Z$に対して$\nu(x,\cdot) \in \mathcal{P}(B^Z)$.

(C.2) $\forall F \in \mathcal{F}_B$に対して$\nu(\cdot,F)$は$\mathcal{F}_A$-可測.

を満足するとき，組$[A^Z,\nu,B^Z]$ (或いは単に$\nu=\nu(\cdot,\cdot)$)を**channel**という．ここで，νの函数表示は$\nu(x,F)$ $(x \in A^Z, F \in \mathcal{F}_B)$．このchannel system $[A^Z,\nu,B^Z]$において，A^Zを**input space** (入力源)，B^Zを**output space** (出力源)という．更に，channelsの定常性について

(C.3) $\nu(Tx,F)=\nu(x,T^{-1}F)$, $x \in A^Z$, $F \in \mathcal{F}_B$.

を仮定するとき，$[A^Z,\nu,B^Z]$を，または単にνを**定常channel**という．

茲で，**shift 変換**TはB^Zに於いても同一の記号Tを用いる（前出）．

Channel $[A^Z,\nu,B^Z]$に於いて，input space A^Z，output space B^Z及びそれらの積空間$A^Z \times B^Z$はすべてcompact metric spacesであり，各々上の正則な確率測度の全体を$\mathcal{P}(A^Z)$，$\mathcal{P}(B^Z)$，$\mathcal{P}(A^Z \times B^Z)$，また，shift Tに関して不変な$\mu \in \mathcal{P}(A^Z)$を**定常情報源**といい，これの全体を$\mathcal{P}_T(A^Z)$で表す（A^Zの関連事項は§3で記載ずみ）．

§5. Averaging Operators より Conditional Expectations

$\mathfrak{A}$: *algebraで単位元Iをもつ.

$\mathfrak{B}$: $\mathfrak{A}$の*subalgebra, $I \in \mathfrak{B}$とする.

このとき，$\mathring{A}:\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$が**averaging operator**（平均作用素）$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\mathring{A}$は線形性をもち，$\mathring{A}I=I$，$(\mathring{A}f)^*=\mathring{A}f^*$，$\mathring{A}((\mathring{A}f)g)=\mathring{A}f\cdot\mathring{A}g$，更に，$\mathring{A}(f^*f)=h^*h$ for some $h \in \mathfrak{A}$．このoperator $\mathring{A}$を記号$\natural$を用いて$\mathring{A}f=f^\natural$によって表す.

平均作用素の典型的な例として，一般の確率空間$(\Gamma,\mathcal{F}_\Gamma,P)$上に於いて，$\mathfrak{A}=L^\infty(\Gamma)$は*algebraの構造をもつが，$\mathcal{F}_\Gamma$の$\sigma$-subfield $\mathcal{F}_0$を定めると，**Conditional Expectation relative to $\mathcal{F}_0$** が

$$E[f/\mathcal{F}_0](\cdot)\ (\overset{\triangle}{=} (\mathring{A}f)(\cdot) \overset{\triangle}{=} f^\natural(\cdot) \text{ とおく})$$

によって表示される．このとき，このoperation $\mathring{A}=\cdot^\natural$が正に*algebra $L^\infty(\Gamma)$上のAveraging Operatorとなる．

$\boxed{\text{註}}$ これの非可換版がvon Neumann algebras上に発展し，Non-Commutative Conditional Expectationsを形成し，更に，これが量子観測論 (Quantum Measurement Theory)のvon Neumann定式に発展する (cf. [5,6,7,9,10]).

$\boxed{\text{註}}$ 前§からの構成も含めて更に興味を覚えることは，ergodicities (情報源及びChannelsの双方の) を捉えることで，ここでもこれの骨子は**Krein-Milmann大定理**であり，上述のConditional Expectationの展開は，**Radon-Nikodymの大定理**がその構成のkey-pointsとなっていることで，現代数学の特に函数解析分野の中心的な2つの基礎定理が情報基礎理論構築のkey pointとなっている．これは大書すべきことである．

次にchannel $[A^Z, \nu, B^Z]$ そのものがAveraging Operator $\mathring{A} : f \to f^\natural$ によってformulateされることを示そう．

直積空間 $A^Z \times B^Z$ 上の連続函数空間（複素数値）を $C(A^Z \times B^Z)$ で表す．このとき，$\forall f \in C(A^Z \times B^Z)$ に対して

$$f^\natural(x) = \int_Y f(x,y)\nu(x,dy) \stackrel{\triangle}{=} f^\natural(x,y) \quad (\text{右辺} = \text{const. on } y \in Y).$$

すると，$\forall f, g \in C(A^Z \times B^Z)$ に対して

$$\begin{aligned} (f^\natural g)^\natural(x,y) &= \int_Y f^\natural(x,y)g(x,y)\nu(x,dy) \\ &= f^\natural(x)\int_Y g(x,y)\nu(x,dy) \\ &= f^\natural(x)g^\natural(x) = (f \cdot g^\natural)^\natural(x,y). \end{aligned}$$

さらに，対応 $f \to f^\natural$ の線形性は明らかである．

逆に，$\exists$Averaging Operator $\mathring{A}\ (= \cdot^\natural) : C(A^Z \times B^Z) \ni f \to f^\natural \in C(A^Z)$ ならば，

$$\xi_x(f) \stackrel{\triangle}{=} f^\natural(x) \quad \text{for } f \in C(A^Z \times B^Z)$$

とおくと，Riesz積分表示定理によって，$\forall x \in A^Z$ に対して，$\exists \mu_x$ (空間 B^Z 上の正則なprobability measure): $\xi_x(\cdot)$ が次の様に積分表示される，$\forall f \in C(A^Z \times B^Z)$ に対して

$$\xi_x(f) = \int_{B^Z} f(x,y)d\mu_x(y) = f^\natural(x)\ (= f^\natural(x,y)) = \mathring{A}f(x,y). \tag{5.1}$$

こうして，$\forall x \in A^Z$ に対して定まる μ_x がchannelの条件を満足している．即ち，「$\nu(x,\cdot)\ (\stackrel{\triangle}{=} \mu_x(\cdot))$ が正にchannel $[A^Z, \nu, B^Z]$ である」ということである．更に詳しく述べれば，

定理5.1. Averaging Operator $\mathring{A} = \cdot^\natural$ に対して，input spaceを A^Z，output spaceを B^Z とするchannel $\nu(\cdot,\cdot)$ がuniqueに定まり

$$\nu(x,F) = \mu_x(F), \quad x \in A^Z,\ F \subset B^Z.$$

ここで，測度 μ_x は等式(5.1)によって得られた確率測度である．

この定理によって本論文を閉じることに致したいが，函数解析の手法は更に可能で，特に，作用素 $\overset{\circ}{A}$，channel $\nu(x,\cdot)$ はHilbert空間上の諸概念及びFourier解析の関連領域にも発展し，興味ある展開がなされる．

参考文献

[1] R. B. Ash, *Information Theory*, Dover Publ., 1990.

[2] Mieko Hirahara, *On the generalized Randon-Nikodym theorem and Riesz's representation theorems*, Tokyo Institute of Technology, Thesis, 1972, 230 pages.

[3] R. S. Ingarden, *Simplified axioms for information without probability*, Prace Matematyczne **9** (1965), 273–282.

[4] 国澤清典・梅垣壽春, 情報理論の進歩, 岩波書店, 1965.

[5] M. Nakamura and H. Umegaki, *On von Neumann theory of measurements in quantum statistics*, Math. Japanicae **7** (1962), 151–157.

[6] Y. Nakamura, *Ergodicity and capacity of information channels with noise sources*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 213–221.

[7] M. Ohya and D. Petz, *Quantum entropy and its use*, Springer, 1993.

[8] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948), 379–423, 623–656.

[9] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebra*, TMJ. **6** (1954), 177–181, II, ibid 8 (1956), 86–100, II, III Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959); IV ibid 14 (1962), 59–85.

[10] H. Umegaki, Conditional expectations と Sampling functions を巡る函数解析, 京都大学数理解析研究所講究録, 2000 年 6 月.